

リカード中立命題の日本経済での検証(2)

GMMを用いた Euler 方程式推定による検証

矢野 光*

Econometric Tests of Ricardian Equivalence: Results for Japan(2) —Empirical Analysis by the Euler Equation Estimation Using GMM—

Akira YANO

This paper presents results of the rough verification of Ricardian equivalence hypothesis in Japan. Japanese consumers do not behave according to patterns decided by short-term income fluctuations. This is shown by the validity of how excess sensitivity models are rejected. Yet the behavior of Japanese consumers also does not carry beyond their generation. Hence, this paper's conclusion may be somewhat vague. Japanese consumers assume the burden of the financial deficit upon their age—the tax burden falling more heavily on some generations than others.

*やの・あきら：敬愛大学国際学部教授 マクロ経済学・産業連関分析

Professor of Macroeconomics, Faculty of International Studies, Keiai University;
macroeconomics and input-output analysis.

はじめに

本稿は Ricard 中立命題が、日本経済において成立するか否かの検証を目的としている。

実証分析の前段として『敬愛大学国際研究』第 13 号（以下、前号と略す）では Ricard 中立命題に関する理論フレームの検討を行った⁽¹⁾。今回は、前号で提示したモデルを基に、実際に日本経済のデータを使用して統計的に検証することを目的としている。

一応確認をしておく、出発となる計測フレームは、Blanchard (1985) の重複世代モデルを実際に計測可能なものに展開した Brunila (1997) モデルである。本モデルは本質的には、恒常所得仮説型の消費関数である。これに政府の財政行動を明示的に導入した。計測するモデルは、恒常所得モデル (permanent income model)、「過剰感応」モデル (excess sensitivity model)、「統合」モデル (consolidated model)、「統合 過剰感応折衷」モデル (consolidated model with a constant model) である。

5. 推計手法の解説 GMM の説明

本稿での消費関数モデルの推計では、一般化モーメント法 (Generalized Method of Moments: GMM. 一般化積率法とも呼ばれる) を用いる。当該方法は、近年証券・金融市場の分析等に良く使用されようになった推計手法である⁽²⁾。

GMM では、通常の方法のように誤差項が正規分布をすることや誤差分散が均一であることを仮定する必要がなく、(i) 誤差項に系列相関が存在する、(ii) 或いは条件付き不均一分散がある、(iii) 係数パラメータが非線形性を持つ、(iv) 最尤法では外生変数の運動法則を特定化する必要があるが、GMM ではそのような情報は必要がない、等メリットを有し、複雑な構造のモデルを推定することに用いることが可能である。

他方、GMM を適用する変数は全て定常でなければならない。従って、あ

る傾向を持つデータに対しては、階差形、増加率などを使い定常性を保つように処理を施さなければならない。

モーメント法は、推定量を導くための体系的手法の「古典」であり、K. Person によって展開されたものであるが、これを一般化したのが Hansen (1982) である。

さて実際の GMM の推定手続きはどのようなになるか。骨子を示すと、下のようになる。なお少し詳しい説明は補論に記載した。

時点 t で観測可能な $h \times 1$ の確率変数ベクトルを y_t とする。また、未知のパラメータが $a \times 1$ ベクトル θ であるとする。このとき、 $r(a)$ 個のモーメントに関する $r \times 1$ の関数ベクトル $h(\theta, y_t)$ が、真のパラメータ θ_0 について、

$$E[h(\theta_0, y_t)] = 0$$

の条件を満足するものとする。これを直交条件と呼ぶ。

いま、 $t = 1, \dots, T$ までのデータが与えられたとき、 $h(\theta, y_t)$ の期待値ベクトルを、その標本平均として計算した

$$g_T(\theta) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T h(\theta, y_t)$$

を定義すると、GMM は、

$$J(\theta) = g_T(\theta)' W_T g_T(\theta)$$

を最小にする $\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} J(\theta)$ を求めるという方法である。 W_T は最適なウェイトを与える $r \times r$ 行列であるが、真のパラメータに関する $h(\theta_0, y_t)$ の二次形式

$$S_T(\theta_0) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T h(\theta_0, y_t) h(\theta_0, y_t)'$$

を用い、 $W_T = S_T(\theta_0)^{-1}$ として与えられる。だが、真のパラメータ θ_0 は事前には与えられないので、 W_T を直接計算することは出来ない。そこで GMM では、最初 $W_T = I$ を仮定し、繰り返し計算によりパラメータを求める。

6. 推計データの分析

(1) 使用データの解説

本稿で推計に用いたデータは、基本的に内閣府経済社会総合研究所編「長期遡及主要系列国民経済計算報告 平成2年基準」から採用している。具体的には、実質民間消費支出は民間最終消費支出、政府消費は政府最終消費支出、可処分所得は国民可処分所得の中の家計部門（個人企業を含む）の数値を用いている。また、国債発行残高は、財務省「国債統計年報」から採録している。

家計可処分所得と国債残高は名目値の数値でしか得られないが、家計可処分所得は、民間最終消費支出のデフレーター、国債残高は国内総生産（GDP）デフレーターを用いて実質化を行った。

実質金利について本稿では外生扱いをしている。実質金利の算定は、名目金利を10年物国債利回り（年末値）とし、それからGDPデフレーターを引いている。具体的数値としては、日本で物価の安定が得られた1985-2000年平均の4.0%を採用している。

(2) データの単位根検定

本稿の消費関数の推計ではGMMを用いているが、GMMではデータの定常性（stationary）が要求される⁽³⁾。もしデータが定常でない場合には、定常となるよう変数を変換しなくてはならない。データが非定常の場合、階差をとり定常過程になるものを階差定常（difference-stationary）という。

上述したデータの定常性の検定を行うのが、単位根検定（unit root test）である。

単位根の検定方法については多くの提案がなされているが、一般的に採用されているのは、Dickey-Fuller test（DF test）とその拡張版である augmented Dickey-Fuller test（ADF test）である⁽⁴⁾。

表1 Augmented Dickey-Fuller testの結果

変数 (国民1人当たり、実質)	レベル ADF (1)	1回の階差 ADF (1)	2回の階差 ADF (1)
推計期間	1966 2000	1966 2000	1967 2000
cpn (民間最終消費支出)	- 1.948043	- 3.376432	- 7.250767
cg (政府最終消費支出)	- 1.318060	- 3.505610	- 7.746220
hn (家計可処分所得)	- 2.446665	- 3.240915	- 8.570591
bn (政府国債発行残高)	1.531686	0.412202	- 4.392370

(注) Mackinnonのサンプル1966 2000のADF(1)での5%水準の臨界値: - 2.948404 .
Mackinnonのサンプル1967 2000のADF(2)での5%水準の臨界値: - 2.951125 .

経済変数の場合、純粋なランダムウォーク (random walk) より、ドリフト (drift) 付きランダムウォークが該当する場合が多い。そこで本稿ではドリフト付きランダムウォークを前提として、DF test を行った⁽⁵⁾。

各変数の ADF test の結果は表1のとおりである。なお、ラグは1期 (ADF(1)) と2期 (ADF(2)) で計算している。

表1の単位根検定から、データは基本的に1回の階差定常の性質を有しているが、bn (政府国債発行残高) のみ2回の階差で定常となる。これはbnの増大が急速であったことを反映していると思われる。

(3) 共和分の検定

単位根の検定から、今回の消費関数の推計では、変数は階差をとった形で推計をしなければならないのであるが、ある条件が満たされていればレベルでの変数が使用できる。その検定は共和分検定である⁽⁶⁾。

即ち各変数が1回の階差定常 $I(1)$ の場合でも、単位根を持つ系列間に長期的関係が成り立つ場合があり、これを共和分という。この検定において3変数以上の分析において二つ以上の共和分が存在する可能性がある。この検定にはJohansenの最大固有値検定 (maximum eigenvalue test)、トレース検定 (trace test) が用いられるケースが多い。ここではcpn (民間最終消費支出)、cg (政府最終消費支出)、hn (家計可処分所得)、bn (政府国債発行残高) の4変数についてJohansenの検定を行った⁽⁷⁾。結果は表2に示される。

Trace test は、1組の共和分の式が5%レベルで存在することを示している。これからcpn, cg, hn, bnの変数間には長期の均衡関係が存在すると

表2 Johansenの共和分検定

Eigenvalue	Trace Statistic	5 Percent Critical Value
0.606907	56.73088	47.85613
0.353857	24.05104	29.79707
0.199460	8.602431	15.49471
0.023045	0.816019	3.841466

(注) 推計期間：1966-2000年。

みてよい。従って本稿での消費関数の推計においては、レベルでの変数を使用するものとする。

7. 計測結果の解析

本章では、実際の計測結果を示す。推計のタイプとしては、四つのモデルに分かれ、具体的には、恒常所得モデル、過剰感応モデル、統合モデル、統合過剰感応折衷モデルである。以下順次計測結果を示す。

(1) 恒常所得仮説 (permanent income model)

恒常所得型のモデルは、前号の(4-18)式に示されているが、ここで再掲する。

$$\begin{aligned}
 c_t^p = & \lambda_0 + [(1+r)(1-\lambda_1) + \lambda_1] c_{t-1}^p - (1-\lambda_1)(1+r)^2 c_{t-2}^p \\
 & - (1-r)^{1+r} h_{t-1} - g_t + (1-\lambda_1 + \lambda_1)^{1+r} g_{t-1} \\
 & - (1-\lambda_1)(1+r)^2 g_{t-2} + v_t \quad (7-1)
 \end{aligned}$$

但し、 $\lambda_0 = \frac{r(1-r)}{(1+r)} c^*$ 、 $\lambda_1 = 1 - \frac{(1+r)}{(1+r)^2}$

$$v_t = (e_{Ht} + e_{Gt}) - [(1+r)(e_{Ht-1} + e_{Gt-1}) + u_t - (1+r)u_{t-1}]$$

誤差項である u_t 、 e_{Ht} 、 e_{Gt} は相関関係を有していることが想定される。

(記号) c_t^p : 1人当たり実質民間消費支出、 h_t : 実質可処分所得、 g_t : 実質政府消費支出、 r : 実質利子率、 λ_1 : 政府消費の中で民間で消費される比率、 λ_0 : 個人の生存確率、 λ_1 : 主観的時間選好率、 c^* : 個人にとって理想的な消

費水準、 u_i 、 e_{jk} 、 e_{or} : 誤差項。

なお、実際の計測に当たっては、長期的には、(時間選好率)と実質率は一致するとの前提から、 $\beta = r$ としている。その場合には、定数項 β の値はゼロとなる。従って今回は乗数項なしでの計測を行う。以下についても同様である。

また、実際の計測に際して(7.1)式から明らかな如く、 β 、 γ 、 δ の推計に当たっては「過剰識別」の問題が発生する。非線形でのパラメータ推計では解が得られない場合もあるが、今回の推計では、幸いにもすべて解が得られた。

今回の推計モデルで着目する重要な変数は、 β と γ である。 $\beta = 1$ は消費者の計画期間が無限であることを表し(無限視野 infinite-horizon)、合理的期待形成に基づいて長期の将来志向(forward-looking)の消費行動を行う恒常所得仮説のキイとなる条件である。これの想定により消費は、ランダムウォークし、消費の変化は予期せぬ所得、税率、政府支出にのみ反応する。

$\beta = 0$ では、政府消費と民間消費の関係がなくなる。合理的な消費者は、政府消費に左右されることなく自らの判断に基づいて長期の消費計画を立てて行動する。

Hall (1978)、Flavin (1981) の恒常所得仮説に無限視野の条件を付加した条件が、Ricard 中立命題となる。その意味から推計結果は、 β と γ の値を中心に検討を行っていく。

表3の結果を見ると日本での恒常所得仮説の推計はおおむね良好である。限界消費性向を表す β の値も0.605と常識の範囲内に収まっている。限界消費性向の値は、消費関数の定式化、データの特性などによって幾分か異なった値に推計される面があるが、高木・秋山・田中(1997)らの推計結果と大きく異なっていない。Brunila (1997) は欧州諸国での推計値が差があることは、 $\beta = (1+r - \beta)/(1+r)$ の定義からもたらされることであるとしている。

Ricard 中立命題の検証で重要なのは、 β の値である。 $\beta = 1$ は無限の消費期間(infinite-horizon)を意味し、 $\beta = 0$ では民間消費と政府消費は関係

表3 (71)式の推計結果(推計期間:1975-2000年)

	α_1	α_2	α_3	J-statistic	Wald test
パラメータ推計 非制約	.605* (4.090)	.995* (12.501)	.017 (.637)	(0.112)	
制約 = 1	0.594* (4.801)		0.017* (2.135)	(0.114)	0.004
制約 = 1, = 0	.292 (5.639)			(0.204)	4.770

(注) パラメータの括弧内の数値は、 t 値を表す。*:有意水準5%。

参考: Anne Brunilaの計測結果⁽⁶⁾

France Unrestricted	.560*	.989*	.088		
Restrictions = 1, = 0	.473*				0.708
Germany Unrestricted	.507	1.052*	-2.782		
Restrictions = 1, = 0	.654*				3.337
UK Unrestricted	.724	.778*	7.494		
Restrictions = 1, = 0	.649*				13.036

がないことを意味する。即ち、 $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$ の恒常所得消費関数は、Ricard中立命題の成立を示唆することになる。

$\alpha_1 = 1$ については、0.996と1に近い値となっており、Wald検定でも0.004とパラメータの制約条件は有効である。また α_2 の値の t 値は、0.637の値となっており、これは α_2 の値を0とみなして差し支えない。

$\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$ の条件下でのWald検定の値も、4.770と5%水準の有意性は得られている。従って日本では、恒常所得仮説(モデル)からの接近では、Ricard中立命題は成立していると言って良いであろう。

また、当該モデルの日本での有効性については、前提となる実質利子率、或いは推計期間を変更しても、パラメータの値は殆ど変化しない(表4参照)。その意味では推計の頑健性(robustness)は得られていると言えよう。

なお、参考としてBrunilaが欧州主要国で計測した結果を掲げている⁽⁹⁾。推計結果を見ると、フランス、ドイツにおいて中立命題が成立している。とくにフランスに関しては、日本を上回る良好な結果を示しているのが注目

表4 (7.1)式で実質利子率、推計期間を変更しての推計結果
(推計期間：1975-2000年)

	1		
利子率 4%	.605*	.995*	.017
利子率 2%	.621*	.989*	-.021
推定期間 1970-2000	.626*	.940*	-.004

(注) パラメータの括弧内の数値は、t値を表す。*：有意水準5%。

される。

(2) 過剰感応 (Excess Sensitivity) と恒常所得仮説

消費者が流動性制約に直面した際、資本市場が完全でなければ自由な借入は難しくなる。その場合には、消費者の消費の平準化は困難となり、消費は予測可能な所得変化に対応する⁽¹⁰⁾。この現象は消費の過剰感応 (excess sensitivity)⁽¹¹⁾と呼ばれるが、そこでは短期の限界消費性向はゼロではなくプラスの値となる。消費者は本来的には合理的で将来志向 (forward-looking) であったとしても、不完全な資本市場のもとでは現在の所得に反応せざるを得なくなる。この場合には、恒常所得仮説も成立しないし、Ricard 中立命題も成立しない。

本項においては、消費者の「過剰感応」が見出せるか否かを検証する。これの方法論については、基本的に特別なモデルを用意する必要はなく、消費関数の消費性向に該当するパラメータ β の値を検討することにより可能となる。但し、若干の工夫は必要である。

いま α という変数を用意し、これは可処分所得に敏感に反応する人の割合を表し、 $(1 - \alpha)$ は恒常所得仮説が該当する消費者の割合とする。これで β がゼロに近く、また α が1に近い値で推計されれば、消費者は将来志向で合理的であり、Ricard 中立命題の成立が支持されることになる。

初めに近視眼的 (myopic) で可処分所得に敏感に反応する消費者 (即ち、消費の計画期間が短い人、以下短期志向の消費者と呼ぶ) についての定義を行う。そのような特性を持つ消費者の消費額を c_t とすると、以下の (7.2) 式が定義される。

$$c_t^k = y_t^k + t^k - t_t^k + h_t \quad (7 \ 2)$$

(記号) c_t^k : 短期志向の消費者 (以下同) の可処分所得、 y_t^k : 1人当たり総労働所得、 t^k : 政府移転支払、 t_t^k : 所得税。

(7 2) の定義式においては、短期志向の消費者 (rule-of-thumb consumers)¹²⁾ の消費決定では、長期の将来の要素は何も含まれていないということである。

有限視野 (finite-horizon) のもとで恒常所得仮説に沿う消費者が、重複世代間の効用を最大となるよう行動するとすれば、前号 (4 15) 式で示した消費関数は、(7 3) 式のように修正される。

$$\begin{aligned} c_t^p &= \omega_0 + \lambda [E_t H_t^p + E_t G_t^p + (1+r)a_{t-1}^p] - g_t^p \\ &= \omega_0 + \lambda_1 [(1-\lambda)E_t H_t + (1-\lambda)E_t G_t + (1+r)a_{t-1}] \\ &\quad - (1-\lambda)g_t \end{aligned} \quad (7 \ 3)$$

$$\text{但し、} \quad \omega_0 = \frac{(1-r)}{(1+r) \lambda} c^* \quad \lambda_1 = 1 - \frac{(1-r)}{(1+r) \lambda}$$

(7 3) 式では有限視野の恒常所得仮説に従う人達の消費は、資産の期待値に全面的に依存するのではなく部分的となる。それは消費性向が可処分所得の $(1-\lambda)$ に対応するからである。

要約すると、国民には短期的な視野で消費行動する人達と、将来志向の恒常所得仮説のもとで行動する人達の両タイプが存在する。従って一国の消費関数は、両者をミックスした形で与えられることになる。その場合の1人当たりの総消費を c_t とすれば、消費関数は、(7 4) 式の如く示される。

$$\begin{aligned} c_t &= \omega_0 + h_t + \lambda_1 [(1-\lambda)E_t H_t + (1-\lambda)E_t G_t + (1+r)a_{t-1}] \\ &\quad - \lambda_1 (1-\lambda)g_t \end{aligned} \quad (7 \ 4)$$

(7 4) 式から計測可能な消費関数の誘導型は (7 5) 式のようになる。そこでこの消費関数は、将来志向の最適化行動に過剰感応の行動様式を折衷させたものである。

$$\begin{aligned}
c_t = & -r_0 + (1+r)(1-\lambda)c_{t-1} + h_t - (1+r)(1-\lambda)h_{t-1} \\
& - (1-\lambda)g_t + (1+r)(1-\lambda)(1-\lambda)g_{t-1} \\
& + (1-\lambda)(1-\lambda)E_t H_t + (1-\lambda)(1-\lambda)E_t G_t \\
& + (1-\lambda)c_t + u_t
\end{aligned} \tag{7.5}$$

但し、 $c_t = (e_{Ht} - e_{Gt})$

なお、 u_t は一時消費を表す。誤差項の $e_{Ht} = (E_t - E_{t-1})G_t$ 、 $e_{Gt} = (E_t - E_{t-1})G_t$ は、将来志向の消費者が $t-1$ 期から t 期において h_{t+j} 、 g_{t+j} に対する期待の修正を表している。

(7.5)式を計測可能な式にすると、(7.6)式が導かれる。

$$\begin{aligned}
c_t = & \lambda_0 + [(1+r)(1-\lambda)]^{t-1} + \lambda_1 + r]c_{t-1} - (1+r)^t (1-\lambda)c_{t-2} \\
& + h_t - \lambda_1 + r [(1+\lambda) + (1-\lambda)]h_{t-1} \\
& + (1+r)^t (1-\lambda)h_t - (1-\lambda)g_t + \lambda_1 + r (1-\lambda)(1+\lambda - \lambda)g_{t-1} \\
& - (1+r)^t (1-\lambda)(1-\lambda)g_{t-2} + v_t
\end{aligned} \tag{7.6}$$

但し、 $\lambda_0 = \frac{r(1-r)}{(1+r)}c^*$ 、 $\lambda_1 = 1 - \frac{(1+r)}{(1+r)^2}$

誤差項 v_t は、以下のような一階の移動平均 (moving average) の構造を有する。

$$\begin{aligned}
v_t = & (1-\lambda)(e_{Ht} + e_{Gt}) - (1-\lambda)(1+r)(e_{Ht-1} + e_{Gt-1}) \\
& + (1-\lambda)u_t - (1-\lambda)^{1+r}u_{t-1}
\end{aligned}$$

検証でのポイントは消費者の計画期間が無限であるか否か、即ち、 $\lambda = 1$ か、そして短期志向の消費者の割合がゼロであるか否か、即ち、 $\lambda = 0$ である。 λ と λ_1 の値の如何により日本全体としての消費者の性格も変わるし、財政政策に対するインプリケーションも異なってくる。

表5を見ると、日本での「過剰感応」モデルの妥当性は採用できない。まず何よりも λ の値がマイナスで推計されている。これは決定的な欠陥であ

る。前述した如く、は生存率を表すパラメータなので $0 < < 1$ の条件を満たさなければならない。最も重要な変数の符号条件が満たされていないということは、当該モデルの検討は論外となる⁽¹³⁾。

また「過剰感応」の行動をする人の割合を示すについて、パラメータの値は常識的な値をとっているが、 t 値は0.120と極端に低く統計的有意性は得られていない。

Brunilaの欧州先進国での計測結果を見ると、France、Germanyでは良好な推計結果を示している。ここでは掲載していないが、 β_1 、 β_2 の値は、Austria (0.985, 0.734) Finland (0.851, 0.671) Netherlands (0.931, 0.750) Sweden (0.931, 0.768)の値が得られている。

以上のような今回の推計結果から、日本については過剰感応を前提としたモデルの有意性は得られなかった⁽¹⁴⁾。

表5 (76)式の推計結果(推計期間:1980-2000年)

	β_1	β_2	β_3	β_4	J-statistic	Wald test
パラメータ推計 非制約	.656* (19.190)	-0.902* (-63.484)	2.509* (9.463)	0.259 (.120)	0.148	
制約 = 1	0.812 (32.296)		-1.024 (-1.047)	0.309* (38.816)	0.226	1702.868
制約 = 1 = 0, = 0	-0.693 (-300.67)				0.293	37042.05

(注) パラメータの括弧内の数値は、 t 値を表す。*:有意水準5%。

参考: Anne Brunilaの計測結果

France Unrestricted	.116	.943*	.057	.428*		
Restrictions = 1 = 0, = 0	.473*					34.663
Germany Unrestricted	.261	.974*	1.075	.702*		
Restrictions = 1 = 0, = 0	.654*					112.602
UK Unrestricted	.284	1.024*	-1.421	.675*		
Restrictions = 1 = 0, = 0	.549					21.506

(3) 重複世代間の政府の予算制約を考慮した統合モデル

(7 1) 式で恒常所得仮説に基づく消費関数を導いたが、そこでは政府行動(政府の予算制約)が明示的に扱われていない。そこで本節では、恒常所得仮説に明示的に政府行動を導入した消費関数モデルを作成する。

まず出発点として政府の予算制約の期間は1期間とする。またモデルの変数は、 t 時点の実質タームで人口1人当たり、とする。

$$t_t = g_t + t_t - b_t + (1+r)b_{t-1} \quad (7 7)$$

(記号) t_t : 政府課税額(一括税) g_t : 政府支出額 t_t : 政府の移転支払額(一定額) b_t : t 時点末の政府債務額、 b_{t-1} : $t-1$ 期末の政府債務額、 r : 実質利子率(一定)

(7 7) 式のもとで将来の政府債務の返済を考慮すると、重複世代間の政府の予算制約式は、以下の式で表される。なお、 ET_t^* は、政府移転支払額の期待値を表す。

$$E_t T_t = E_t G_t + E_t T_t^* + (1+r)b_{t-1} - \lim_{j \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1+r} \right]^j b_{t+j} \quad (7 8)$$

$$\text{但し、} E_t T_t = E_t \lim_{j \rightarrow \infty} (1+r)^{-j} t_{t+j}$$

は t 時点の政府課税額の期待値(現在価値表示)である。また、

$$E_t G_t = E_t \lim_{j \rightarrow \infty} (1+r)^{-j} g_{t+j}, \quad E_t T_t^* = E_t \lim_{j \rightarrow \infty} (1+r)^{-j} t_{t+j}$$

は、 t 時点における政府消費と政府移転支出の期待値(現在価値表示)である。

ここで留意を必要とするのは、ここで時間に関する割引率が、 $1/(1+r)$ から $1/(1+r)$ に変わることである。これは政府活動の時間範囲が無限視野(infinite planning horizon)であることに因る。

政府活動に非ポンジ・ゲーム条件(no-Ponzi-game condition)を課すと、 $E_t \lim_{j \rightarrow \infty} (1+r)^{-j} b_{t+j} = 0$ となり、政府の予算制約は(7 9)式のように変形される。

$$E_t T_t = E_t G_t + E_t T_t^* + (1+r) b_{t-1} \quad (7.9)$$

(7.9)式は、課税額の期待値（現在価値）は、初期の政府債務に期待政府支出の現在価値および政府移転の額の期待値（現在価値）を加えたものと等しくなることを示している。これは重複世代間では、現在、課税で資金調達を減らすと、その分だけ国民に将来の増税を予想（期待）させることを意味する（政府支出は一定）。(7.9)式を前号(4.16)式に代入すると Ricard 的中立命題を織り込んだ統合消費関数となる(7.10式)。

$$\begin{aligned} c_t^p = & -r_0 + (1+r) \sum_{j=0}^{\infty} (1-\alpha)^j c_{t-1+j} + (1-\alpha) E_t Y_t \\ & + \alpha (1-\alpha) E_t G_t - g_t + (1+r) \sum_{j=0}^{\infty} (1-\alpha)^j g_{t-1+j} \\ & - (1+r) \sum_{j=0}^{\infty} (1-\alpha)^j b_{t-1+j} + u_t \end{aligned} \quad (7.10)$$

$$\text{但し、} E_t Y_t = E_t \left(\sum_{j=0}^{\infty} (1+r)^{-j} y_{t+j} \right)$$

$E_t Y_t$ は、将来の労働所得の期待値の現在価値である。誤差項は $u_t = (e_{y,t} + e_{c,t})$ であり、 $t-1$ 期から t 期にかけての予期せぬ労働所得と政府消費の変化から得られる。さらに u_t は、一時的 (transitory) 消費である。

(7.10)式は、個人消費は消費者にとり利用可能な実質的な資源の期待現在価値から初期の政府債務をマイナスしたものであることを示している。

もし $\alpha = 1$ で且つ政府債務額が予め決まっているならば、租税ないしその後起こる政府の債務増加も消費者の資産（富）に影響を及ぼさない。そのケースでは、個人消費は政府支出 g_t, g_{t-1} により影響され、政府の資金調達の差異は関係なくなる。(7.10)式の統合モデルでは消費は、予想外の労働所得と政府消費の変化からのみ変動することになる。

(7.10)式は、政府の予算制約と個人の消費計画の期間を一致させることが出来る場合に成立する。もし個人が政府よりも短い消費計画期間で行動するならば（即ち、 $0 < \alpha < 1$ ）彼らの時間割引率は、 $(1+r)^{-1}$ ではなく $\alpha / (1+r)$ となる。これは Ricard 中立命題を否定するものであるし、財政政策の非中立性を意味する。

さて(7-10)式を観測可能な変数で、推計可能なような誘導型に変換すると(7-11)式が得られる。

$$\begin{aligned}
 c_t^p = & \alpha_0 + [(1+r)\alpha_1(1-\beta_1)] + (1+r)^t [x_{t-1}^p - (1-\beta_1)\alpha_1(1+r)^{t-1}c_{t-2}^p \\
 & - (1-\beta_1)^{t-1}y_{t-1} - g_t \\
 & + [1 - (\beta_1 - 1) + \alpha_1] (1+r)^{t-1}g_{t-1} \\
 & - (1-\beta_1)\alpha_1(1+r)^{t-1}g_{t-2} - (1-\beta_1)\alpha_1(1+r)^{t-1}b_{t-1} \\
 & + (1-\beta_1)\alpha_1(1+r)^{t-1}b_{t-2} + v_t \tag{7-11}
 \end{aligned}$$

但し、 $\alpha_0 = \frac{r(\beta_1 - r)}{(1+r)} c^*$ 、 $\alpha_1 = 1 - \frac{(1+r)}{(1+r)^2}$

誤差項の v_t は、以下のような一階の移動平均 (moving average) の構造に従う。

$$v_t = (\epsilon_{yt} + \epsilon_{gt}) - (1+r)\alpha_1(\epsilon_{yt-1} + \epsilon_{gt-1}) + u_t(1+r) - u_{t-1}$$

また攪乱項は、

$$\epsilon_{yt} = (E_t - E_{t-1}) \sum_{j=0}^{\infty} (1+r)^{-j} y_{t-j}, \quad \epsilon_{gt} = (E_t - E_{t-1}) \sum_{j=0}^{\infty} (1+r)^{-j} g_{t-j}$$

となる。

(7-11)式の推計結果は、表6に示される。

表6での推計結果の特色は、 α_1 の値がゼロに極めて近い値となっていることである。これは、民間消費が所得の値に係わりなくなることを示しており、消費関数の成立要件を満たしていない。また α_1 の値も、2.180と $0 < \alpha_1 < 1$ の条件からはずれている。事実 $\alpha_1 = 1$ 、 $\alpha_0 = 0$ でのWald検定値の値は大きな値となっている。

この点日本と欧州では対照をなしている。欧州ではまず α_1 の値が1に近

表6 (7.11) 式の推計結果

	1			J-statistic	Wald test
パラメータ推計 非制約	-.000* (-7.895)	2.180* (4.744)	.381* (5.872)	(0.216)	
制約 = 1	.421* (7.784)		.313* (.606)	(0.190)	6.593
制約 = 1, = 0	-1.343* (-8.252)				37.849

(注) パラメータの括弧内の数値は、 t 値を表す。* : 有意水準5%。

参考: Anne Brunilaの計測結果

France Unrestricted	.255	1.030*	-4.937*		
Restrictions = 1, = 0	-.198				12.473
Germany Unrestricted	.470*	841*	-2.002*		
Restrictions = 1, = 0	.755*				21.226
UK Unrestricted	.264	1.107*	-.593*		
Restrictions = 1, = 0	.340*				1.359

い国が多く、Ricard 中立命題に関して恒常所得モデルより統合モデルのほうが成立を支持している国が多い。 $\alpha = 1$ の条件を大きくはずれるのは、Germanyのみである。

統合モデルがよく適合しているのはUKである。UKと日本の推計結果を見ると、大きく異なっている。総じて欧州諸国は、早い時期から低成長と財政赤字に恒常的に直面してきた。国民は財政制約の問題を強く意識していると推察される。これに反し日本では国債が大量発行されたのは、何と云っても1990年代のバブル崩壊以降であり、また国民の意識としても、財政支出による景気回復という意識が強く、財政赤字の問題を強く意識し始めたのは、90年代後半である。このことが今回の推計結果に表れていると思われる。

最後に、統合モデルと過剰反応モデルを統合した、最も一般化した消費関数を考えてみよう。暫定的にこの消費関数を統合 過剰感応折衷モデルと呼ぶ。この式は、今まで述べてきた消費モデルを総て統合したものであ

り、その意味では最も「一般化した消費関数モデル」と言える。

(7 6)式と(7 11)式を統合すると、以下に示す(7 12)式が得られる⁽¹⁵⁾。

$$\begin{aligned}
 c_t = & c_0 + [(1+r)\alpha(1-\beta)]^{1+r} [c_{t-1} - (1-\beta)\alpha(1+r)c_{t-2} \\
 & - [(1+r)\alpha(1-\beta)]^{1+r} h_{t-1} + (1+r)\alpha(1-\beta)h_{t-2} \\
 & - (1-\beta)\alpha^{1+r} y_{t-1} - (1-\beta)\alpha g_t \\
 & + (1+r)[1+r - (\alpha + \beta)]g_{t-1} - (1-\beta)\alpha(1+r)g_{t-2} \\
 & - (1-\beta)\alpha(1+r)b_{t-1} + (1-\beta)\alpha(1+r)b_{t-2} + v_t \quad (7 12)
 \end{aligned}$$

$$\text{但し、 } c_0 = \frac{r(1-\beta)}{(1+r)} c^* \quad \beta = 1 - \frac{(1+r)}{(1+r)^2}$$

誤差項は、

$$\begin{aligned}
 v_t = & (1-\beta)\alpha(e_{yt} + e_{ct}) - (1-\beta)\alpha(1+r)\alpha(e_{yt-1} + e_{ct-1}) \\
 & + (1-\beta)\alpha u_t - (1-\beta)\alpha^{1+r} u_{t-1}
 \end{aligned}$$

となる(計測結果は表7)。

日本について言えば、統合 過剰感応折衷モデルも、日本の現実を良く説明しているとは言い難い。 $\beta = 0.739$ は1と大きく離れている訳ではないが、恒常所得モデルの値0.996ほど1に近い値となっていない。

また $\alpha = -0.569$ の値を示しているが、これは民間消費と政府消費が代替関係にあることを示している。

β は、「過剰感応」の行動をする人の割合であるが、この値が0.267(約4分の1)であることについては、不自然さは感じられない⁽¹⁶⁾。

表7の結果も、積極的に Ricard 中立命題を支持するものとは言い難い。

欧州でも表7で掲げた国は良好な推計結果を示していない。UKなどは、 α の値はマイナスに推計されている。また France、Germanyでは β の値は1を超えている。 $\beta = 1$ 、 $\alpha = 0$ の条件を5%水準で満たしている国は、Finland (Wald test 1.481, 以下同)、Netherlands (2.887)、Sweden (0.027)で

表7 (7.12) 式の推計結果 (推計期間: 1965-2000年)

	1				J-statistic	Wald test
パラメータ推計 非制約	.189* (2.460)	.739* (7.986)	-.569* (-3.836)	.267* (3.615)	(0.157)	
制約 = 1	.431* (3.331)		-.170 (-5.480)	1.091 (7.841)	(0.163)	7.897
制約 = 1, = 0	.926 (5.202)			2.416 (8.198)	(0.190)	30.427

(注) パラメータの括弧内の数値は、t値を表す。* : 有意水準5%。

参考: Anne Brunila の計測結果

France Unrestricted	.568	1.027*	-.084*	.416*		
Restrictions = 1, = 0						45.573
Germany Unrestricted	.528*	1.106*	.004	.764*		
Restrictions = 1, = 0						89.079
UK Unrestricted	-.579	.740*	.010	.542*		
Restrictions = 1, = 0						16.667

ある。Finland、Netherlands、Sweden等の国々は、人口規模では小国で政府行動についての情報が国民に普及しやすいこと、また歴史的に社会福祉政策が発達した国々であり、国民は将来志向の思考及び行動様式を示す度合いが強いことなどが要因として考えられる。即ち、国民は国家の財政状況をよく注視しているとも言える。

或いは、これらの国々は資本市場がより完全で、 θ の値が常に一定しているとも考えられる。

8. 結語

本稿の目的は、冒頭にも述べた如く日本においてRicard中立命題が成立するか否かを検証することにあるが、今回の分析結果では、日本においてRicard中立命題が厳密ではないが、恒常所得仮説において成立していると見てよい状況が得られた。反対に日本では恒常所得仮説と反対の仮説であ

る過剰感応モデルが明確に否定される。これは日本における家計の流動性制約を反映しているものであろう。日本では基本的には Ricard 中立命題の成立は支持されるであろう。しかし推計結果は、残念ながらは少し曖昧である。例えば「統合 過剰感応折衷」モデル理論的には、最も現実をよく反映した適用範囲の広い一般化されたモデルと言えらると思われるが、残念ながら、当モデルの日本での妥当性は統計的には得られない。これは過剰感応モデルが適用される人の割合 が一定でない、或いは資本市場の不完全性の程度が時代より変化していることに因るとも考えられる。今後、この面での検討が必要である。 (完)

(注)

(1) 矢野 (2004) を参照されたい。

(2) 代表的には羽森 (1997)、堀 (1998)、釜江 (1999)、乾・室町 (2000) 等の論文がある。

(3) 我々が観測できる時系列データは、ある確率過程での実現値である。その確率変数を y_t とし、 y_t が、次の条件を満足するとき、

$$E(y_t) = \mu \text{ for all } t$$

$$V(y_t) = \sigma^2 \text{ for all } t$$

$$Cov(y_t, y_{t-k}) = \gamma_k \quad k = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots$$

そのデータは定常性を満たす、あるいは弱定常性 (weakly stationary stochastic process) であるという。

(4) 単位根検定について、詳しくは Maddala (2001) を参照。

(5) 非定常な性質を持つデータとしては、代表的には3種類のモデルがある。

ランダムウォーク $y_t = y_{t-1} + u_t$

ドリフト付きランダムウォーク $y_t = a + y_{t-1} + u_t$

ドリフト+トレンド項 $y_t = a + y_{t-1} + b_t + u_t$

(6) Johansen の検定の解説については、羽森 (2000) の解説がわかりやすい。その骨子は以下のとおりである。

n 変数からなるベクトル $y_t = [Y_{1t}, Y_{2t}, \dots, Y_{nt}]$ に対して、次のモデルを考える。

$$y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \dots + \alpha_p y_{t-p} + u_t \quad (1)$$

但し、 $E(u_t) = 0$, $E(u_t u'_t) =$

である。(1) 式の両辺から y_{t-1} を引いて整理すると、(2) 式が得られる。

$$y_t = y_{t-1} + \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_{i+1} y_{t-1-i} + u_t \quad (2)$$

そこでは、 $\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_p \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_{p+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{p-1} & \alpha_p & \dots & \alpha_{2p-1} \end{bmatrix}$ 、 $\alpha_i = -\sum_{j=i+1}^p \alpha_j$ である。

いま、 α のランクにより、次の三つの場合が存在する。

- ・ケース1 : $\text{rank}(\alpha) = n$: この場合には、 y_t の各要素は定常。
- ・ケース2 : $\text{rank}(\alpha) = r$; ($0 < r < n$) : この場合には、 r 個の共和分ベクトルが存在。
- ・ケース3 : $\text{rank}(\alpha) = 0$: この場合には、 y_t の各要素は $I(1)$ 変数。

もし r 個の共和分ベクトルが存在すれば、 $y = AB'$ となる ($n \times r$) 次の行列 AB' が存在し、(2) 式は次のように書き直せる。

$$y_i = AB' y_{i-1} + \sum_{j=1}^{p-1} y_{i-1} + u_i \quad (3)$$

但し、 $\text{rank}(A) = \text{rank}(B) = r$

(3) 式がベクトル誤差修正モデルである。(3) 式の未知パラメータ推定は、最尤法によって行われる。

データとして、 y_1, y_2, \dots, y_p が与えられると、 $y_{p+1}, y_{p+2}, \dots, y_T$ の対数尤度関数は、以下のよう
に与えられる。

$$-\frac{(T-p)n}{2} \log(2) - \frac{T-p}{2} \log \left| \sum_{i=p+1}^T (u_i' \cdot u_i) \right| \quad (4)$$

最尤推定量は、 $y = AB'$ という制約のもとで、(4) 式の尤度を最大にするように未知パラメータ ($\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}$) を求めれば良い。

(7) 共和分ランクの次数を決めるため、二つの検定方法が用いられる。

第1は、帰無仮説と対立仮説を次のように設定する。

H_0 : r 個の共和分ベクトルが存在。 H_A : n 個の共和分ベクトルが存在。この検定のためには次の統計量が用いられる。

$$\text{trace}(r) = -T \sum_{i=r+1}^n \log(1 - \lambda_i) \quad (1)$$

但し、 λ_i は固有値の推定値であり、 $0 \leq r \leq n$ 。(1) 式で与えられる統計量は、異なった固有ベクトルの数が r という帰無仮説を、一般的な対立仮説に対して検定するもの。もし r 個の共和分ベクトルが存在すれば、 $r+1$ 個から n 個までの共和分ベクトルに基づいて説明変数を追加してもモデルの尤度は殆ど増加しないはずである。推定された固有値が 0 とは異なればなるほど $\text{trace}(r)$ の値は大きくなる。このような検定をトレース検定 (trace test) と呼ぶ。

第2は、帰無仮説と対立仮説を次のように設定する。

H_0 : r 個の共和分ベクトルが存在。 H_A : $r+1$ 個の共和分ベクトルが存在。この検定のためには次の統計量が用いられる。

$$\max(r, r+1) = -T \log(1 - \lambda_{r+1}) \quad (2)$$

(2) 式で与えられる統計量は、共和分ベクトルの数が r 個であるという帰無仮説を、共和分ベクトルが $r+1$ 個であるという対立仮説に対して検定するものである。この検定は、最大固有値検定 (maximum eigenvalue test) と呼ばれる。この場合にも、推定された固有値が 0 に近いほど \max の値は小さくなる。

- (8) Brunila (1997) の推計期間は、国によって異なるがおおむね 1962-94 年である。日本についての計測期間を 1975-2000 年としたのは、日本経済は第一次石油危機 (1973 年) を境に大きな構造変化を迎えたとの認識から、構造転換期後の日本で推計した方が良いとの判断からである。
- (9) Brunila (1997) では、表 2 に掲載した国以外に Austria, Belgium, Finland, Greece, Italy, Netherlands, Sweden 等の国々の推計を行っているが、ここでは掲載を割愛した。
- (10) 一般の恒常所得仮説では、反対に消費は、予想外の課税には反応しない。
- (11) 消費の過剰感応 (excess sensitivity) の解説については、Romer (1996) を参照されたい。
- (12) 親指で長さを計るような大雑把な人という意味で、将来を考える合理的な消費者と対比される。
- (13) この結果は意外であった。実際直感的には、当該モデルに該当する日本人は多い様に推

- 察していた。
- (14) この原因には、日本人の習慣形成 (habit formation) の分析も必要であろう。
- (15) 式の導出過程の詳細については、紙幅の都合からだいたい省略した。詳しくは Brunila (1997) を参照されたい。
- (16) 筆者としては当該モデル自身は、現状の日本について一番実感にあってるように思える。なお、当該モデルは Ricard 中立命題の検証に關しての古典的論文 kormendi (1983) に似通っており、Brunila 自身もそのように述べている。

(参考文献)

- Barro, Robert J.(1974) “Are Government Bonds Nets Wealth?” *Journal of Political Economy*,(6) pp. 1095–1117.
- Blanchard, O. J.(1985), “Debt, Deficits, and Finite Horizons,” *Journal of Political Economy*, 93, pp. 223–247.
- Blanchard, O. J. and Stanley Fischer(1989), *Lectures on Macroeconomics*, The MIT Press (高田聖治訳 『マクロ経済学講義』、1999年、多賀出版)。
- Brunila, Anne (1997) *Fiscal Policy and Private Consumption-Saving Decisions; European Evidence*, Bank of Finland Studies E8.
- Flavin, M. A.(1981) “The Adjustment of Consumption to Changing Expectations about Future Income,” *Journal of Political Economy* 89(5) pp. 974–1009.
- Green, H. William(2000) *Econometric Analysis Fourth Edition*, Prentice-Hall, Inc.(斯波恒正・中妻照男・浅井学訳 『計量経済分析』、(改訂新版)、2003年、エコノミスト社)。
- Hall, R. E.(1978), “Stochastic Implications of the Life Cycle-Permanent Income Hypothesis: Teory and Evidence,” *Journal of Political Economy* 86(6) pp. 971–987.
- 羽森茂之 (1997) 『消費者行動と日本の資産市場』、東洋経済新報社。
(2000) 『計量経済学』、中央経済社。
- Hansen, L. P.(1982) “Large Sample Properties of Generalized Methods of Moments Estimators,” *Econometrica*,(50) pp. 1029–1054.
- 畠中道雄 (1996) 『計量経済学の方法 改訂版』、創文社。
- Hayashi, Fumio(1982) “The Permanent Income Hypothesis: Estimation and Testing by Instrumental Variables,” *Journal of Political Economy* 90(5) pp. 895–916.
- 堀敬一 (1998) 『資産価格モデルの実証研究 展望』、第3回日本ファイナンス学会研究観望会報告。
- 井堀利宏・加藤竜太・中野秀夫・中里透・土居丈朗・近藤広紀・佐藤正一 (2002) 「財政赤字と経済活動：中長期視点からの分析」『経済分析』第163号、内閣府経済総合研究所。
- 乾孝治・室町幸雄 (2000) 『金融モデルにおける推定と最適化』、朝倉書店。
- 釜江廣志 (1999) 『日本の金融市場・金融市場の効率性』、有斐閣。
- 刈屋武昭・矢島美寛・田中勝人・竹内啓 (2003) 『統計科学のフロンティア 8 経済時系列の統計 その数理的基礎』、岩波書店。
- Kormendi, Roger C.(1983) “Government Debt, Government Spending, and Private

- Sector Behavior," *American Economic Review*, 73(5) pp. 994–1010.
- Maddala, G. S.(2001) *Introduction to Econometrics*, Third Edition(佐伯親良訳 『計量経済学の方法 改訂3版』、2004年、エコノミスト社)。
- 松浦克己 / コリン・マッケンジー (2001) 『EViewsによる計量経済分析』、東洋経済新報社。
- Ricard, David(1820) "Funding System, 1820" in P. Sraffa with the collaboration of M. H. Dobb, 10 vols., ed., *The Works and Correspondence of David Ricard*, Cambridge, 1951, vol. IV, at the University Press for the Royal Economic Society, 1951, Pamphlets and Papers, 1815–1823, 1951 (磯村隆文訳 『公債制度論』、リカードウ全集、1970年、雄松堂出版)。
- Romer, David(1996) *Advanced Macroeconomics*, The MacGraw-Hill Companies, Inc. (堀雅弘・岩成博夫・南條隆訳 『上級マクロ経済学』、1998年、日本評論社)。
- 高木康順・秋山裕・田中辰雄 (1997) 『応用計量経済学』、多賀出版。
- 山澤成康 (2004) 『実戦計量経済学入門』、日本評論社。
- 矢野光 (2004) 「リカード中立命題の日本経済での検証 (1) GMMを用いた Euler 方程式推定による検証」『敬愛大学国際研究』第 13 号。
- Zabolotyuk, Yuriy (2003) "Fiscal Policy and Private Sector Behavior: Evidence from Transition Economies," National University of "Kyiv-Mohyla Academy" Economics Education and Research Consortium Master's Program in Economics.

(補論) GMMの説明

以下の説明は、主として Maddala (2001) による。更に詳細には、Green (2000) を参照されたい。

(1) 計量モデルのGMM推定

まず以下のような線形回帰モデルを考える。

$$y = X\beta + \varepsilon \quad E(\varepsilon) = 0 \quad (1.1)$$

$$E(X'\varepsilon) = 0 \quad (\text{直交条件})$$

$$E(X'X) = Z$$

(記号) y ; 非説明変数ベクトル、 X ; 説明変数ベクトル、 β ; 推定する $K \times 1$ パラメータベクトル

OLS 推定量は β を最小にすることで求められるが、GMM 推定法は、 $X'WX'$ を最小にすることにより求められる。 W は「ウェイト行列」である。そこで $(y - X\beta)'WX'(y - X\beta)$ を最小にすると (1.2) 式が得られる。

$$X'WX'X^{-1} = X'WX'y \quad (1.2)$$

いま $E(X'\varepsilon) = 0$ のケースを考える。 Z は操作変数の集合で X と同じ次元である。直交条件は次のように表すことができる。

$$E(Z') = 0 \quad V(Z') = (Z'Z)^{-2}$$

一般化操作変数推定量 (GIVE) は、 $E(\hat{\beta}) = \beta$ であれば、次式を最小にする。

$$q = (y - X\beta)' Z(Z'Z)^{-1} Z'(y - X\beta)$$

これに対し GMM は (1.3) 式を最小にする。

$$q = \beta' WZ' \text{ 或いは } q = (y - X\beta)' ZWZ'(y - X\beta) \quad (1.3)$$

($X'Z$) W が非特異行列であれば GMM 推定量が得られる。

W の選択に制限は加えていないので、(1.3) 式は一般的である。どのような W の選択に対しても、パラメータ識別の十分な直交条件がある限り q の最小化による推定量は、非線形最適化で求まることになる。

$$\hat{\beta}_{GMM} = (X'ZWZ'X)^{-1} (X'ZWZ'y)$$

Hansen (1982) は、 W の最適選択は $(Z'Z)^{-1} / \sum [(Z'u)^2]$ となることを示した。

$E(\hat{\beta}) = \beta$ ならば、 $(Z'Z)^{-1}$ である。

従って、この場合の GMM は、以下のように表される。

$$\hat{\beta} = [X'Z(Z'Z)^{-1}Z'X]^{-1} [X'Z(Z'Z)^{-1}Z'y]$$

なお、 $\hat{\beta}_{GMM}$ の共分散行列は、

$$[X'Z(Z'Z)^{-1}Z'X]^{-1}$$

である。GMM は非線形合理的期待モデルの推定、或いは $\beta = E(\hat{\beta})$ が極めて一般的な形をとる場合によく利用されている。

(2) 仮説の検定

推定される K 個のパラメータ に J 本の制約式、

$$H_0 : h(R(\beta)) - r \quad (1.4)$$

が成り立っていると考える。

c_1 を無制約下で求められた β の GMM の推定値、 c_0 を制約付き β の GMM 推定値とする。大標本では尤度比 (LR) 検定、Wald (W) 検定、Rao のスコア検定の三つのテストがあるが、本稿では Wald 検定を用いる。

(1.4) 式を帰無仮説とすると、Wald 統計量は

$$[R(c_1) - r]' W^{-1} [R(c_1) - r] \sim \chi^2 [J - K]$$

である。 W^* の定義としては $W^* = \{ \text{Est.Asy.Var}[R(c_1) - r] \}^{-1}$ である。

Wald 統計量は無制約推定量が制約を満たさない度合いを測っている。
漸近共分散行列の通常の推定量は、

$$\text{Est.Asy.Var}[R(c_1) - r] = A_1 \{ \text{Est.Asy.Var}[c_1] \} A_1'$$

である。上式で A_1 が新たに表れてくるが、 $A_1 = R(c_1) / c_1'$ (A_1 は $J \times K$ 行列) である。Wald 統計量は無制約推定値のみを使って計算される。